



L'INSEGNAMENTO DELLA FISICA
E DELLE SCIENZE IN UNA
PROSPETTIVA SISTEMATICA,
STORICA E CRITICA

BOLOGNA / 27-29 GENNAIO 2022

Tempo caratteristico di una sonda di temperatura



<https://bit.ly/3u8wbmw>





Tra la misura Y del valore di grandezza fisica X di un generico strumento di misura esiste una relazione detta funzione di risposta

In base allo scambio di energia dello strumento si possono avere diversi casi, tra i quali

- *Strumenti di ordine 0*

$Y = kX$ dove K non è altro che la sensibilità dello strumento

- *Strumenti di ordine 1*

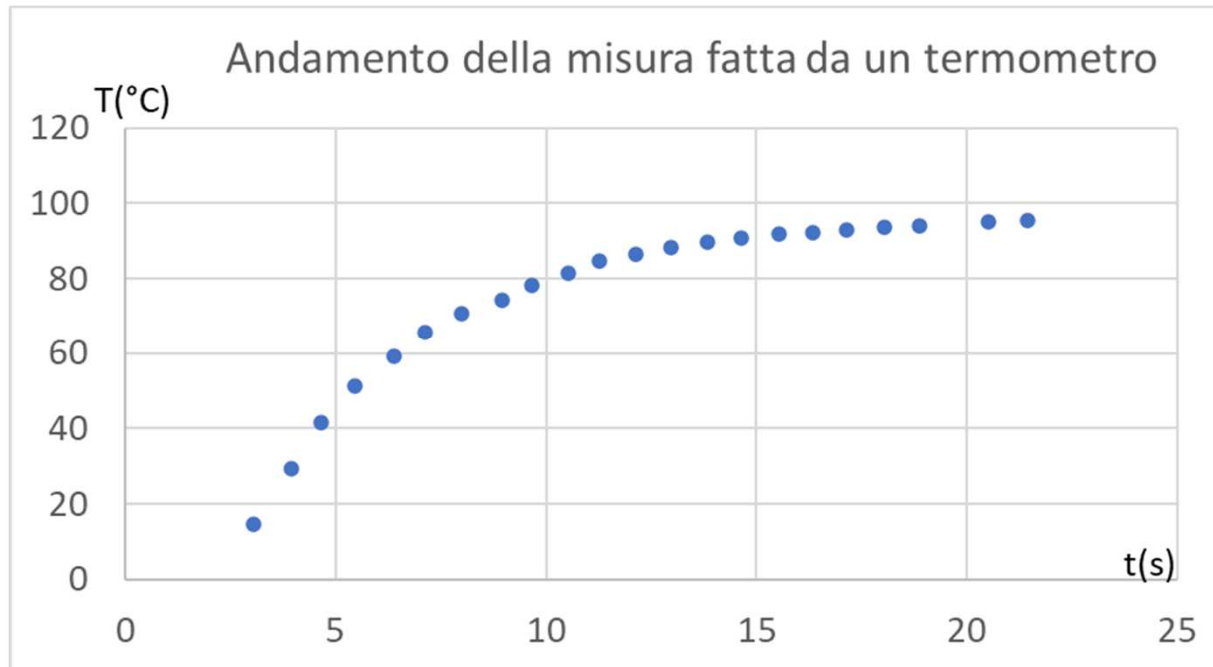
Tra Y e X esiste una equazione differenziale del primo ordine (*Termometro*)

- *Strumenti di ordine 2*

Tra Y e X esiste una equazione differenziale del secondo ordine
(*Dinamometro a molla, strumenti a bobina mobile*)



Se si mette a contatto un termometro con un corpo, ad es. più caldo, si può ottenere il seguente andamento



La risposta dello strumento di misura può avere, nel tempo, un andamento particolare.

L'obiettivo dell'esperimento è dunque
determinare le grandezze che caratterizzano questo andamento.



Fisicamente è ragionevole aspettarsi che il termometro non indichi immediatamente il valore della temperatura del corpo.

La temperatura è infatti una misura dell'agitazione termica di un oggetto e, se quelle del termometro e del corpo sono inizialmente diverse, quando questi vengono a contatto ha luogo tra loro un trasferimento di energia (calore)

Questo processo di trasferimento di energia non è un processo istantaneo e avviene finché tra i due corpi esiste una differenza di temperatura.



Se una sostanza a temperatura iniziale T_1 è posta in un ambiente a temperatura T_2 , essa assorbe o cede una quantità di calore che dipende dalla sua capacità termica (prodotto della massa per il calore specifico a pressione costante) secondo la relazione

$$Q = C \cdot \Delta T = c \cdot m \cdot (T_2 - T_1)$$

Per valori molto piccoli di ΔT la relazione può essere approssimata con

$$dQ = C \cdot dT$$

La quantità di calore scambiata nell'intervallo di tempo dt dipende dalla differenza fra le temperature dei due corpi che interagiscono, dalla conducibilità della sostanza termometrica e dalle caratteristiche geometriche della superficie attraverso cui avviene lo scambio di calore.

$$\frac{dQ}{dt} = h \cdot (T_2 - T(t))$$

dove h è una costante e $T(t)$ è la temperatura indicata dal termometro al generico istante t .



da cui

$$\frac{dT}{dt} = \frac{h}{C} \cdot (T_2 - T(t))$$

E' un'equazione differenziale la cui soluzione è $T(t) = T_2 - (T_2 - T_1) \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$

dove $\tau = \frac{C}{h}$

ha le dimensioni di un tempo ed è chiamata tempo caratteristico del termometro

$T(t)$ è una funzione esponenziale del tempo, la cui variazione è tanto più rapida quanto minore è τ , ovvero quanto più “pronto” è il termometro



Se

$$T_2 - T(t) = \Delta T(t)$$

e

$$(T_2 - T_1) = \Delta T$$

allora la precedente relazione può essere scritta

$$\frac{\Delta T(t)}{\Delta T} = e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (*)$$

τ rappresenta il tempo che bisogna aspettare affinché la differenza $\Delta T(t)$ tra la temperatura da misurare e la temperatura misurata sia diventata $1/e$ rispetto alla differenza iniziale ΔT .



Quanto tempo aspettare per avere dunque una buona misura?

Per avere una misura affidabile della temperatura da misurare è necessario che differenza tra la temperatura misurata $T(t)$ e quella da misurare T_2 sia minore della risoluzione δ del termometro ossia $T_2 - T(t) < \delta$ e quindi, per la (*)

$$(T_2 - T_1) \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} < \delta$$

risolvendo rispetto a t si ottiene che, per avere un valore affidabile della temperatura da misurare, bisogna aspettare almeno un tempo t_a tale che

$$t_a > a \cdot \tau$$

$$\text{dove } a = \ln \left(\frac{T_2 - T_1}{\delta} \right)$$



Esperimento

Descrizione sintetica

Si misura in funzione del tempo la temperatura di un termometro inizialmente in equilibrio con ghiaccio fondente e successivamente immerso in un becker con acqua bollente. Si analizzano i dati dell'andamento temporale delle variazioni di temperatura.

Materiale

- Termometro
- thermos, contenente ghiaccio fondente a temperatura $0\text{ }^{\circ}\text{C}$;
- becker, contenente acqua distillata a temperatura $100\text{ }^{\circ}\text{C}$;
- fornellino elettrico;
- Pc con software per analisi dati o foglio di calcolo.



Svolgimento

Si pone inizialmente il termometro in equilibrio nel thermos con il ghiaccio fondente. Poi lo si immerge nel becker con acqua bollente e si registrano le variazioni della temperatura T misurata in funzione del tempo t .

Si definisce poi la quantità adimensionale

$$R = \frac{T_2 - T(t)}{T_2 - T_1}$$

In questo caso $T_1 = 0\text{ }^{\circ}\text{C}$ e $T_2 = 100\text{ }^{\circ}\text{C}$

Essendo $T_2 > T_1$ e $T(t) \leq T_2$ per ogni t , R risulta essere una funzione decrescente che varia tra 1 e 0.

ossia

$$R = e^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$\ln R = -\frac{t}{\tau}$$



ricordando che $\frac{\Delta T(t)}{\Delta T} = e^{-\frac{t}{\tau}}$ allora

$$R = e^{-\frac{t}{\tau}}$$

Si può procedere, pertanto, analizzando una generica relazione lineare tra $\ln R$ e t

$$\ln R = m \cdot t + b$$

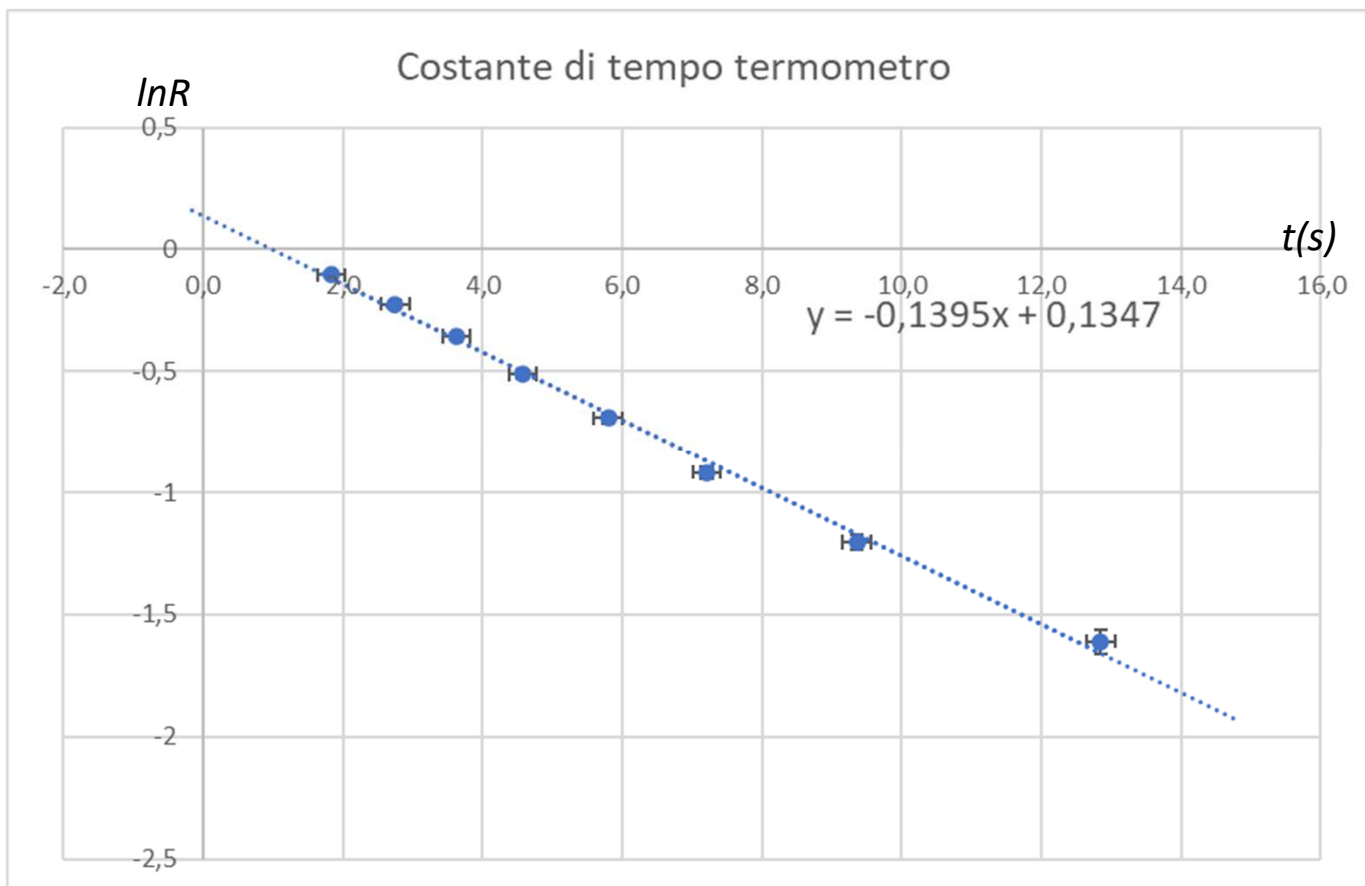
t(s)	$\Delta t(s)$	T(°C)	$\Delta T(^{\circ}\text{C})$	R	ΔR	$\ln R$	$\Delta \ln R$
1,8	0,2	10	1	0,9	0,0100	-0,10536	0,01
2,8	0,2	20	1	0,8	0,0100	-0,22314	0,01
3,6	0,2	30	1	0,7	0,0100	-0,35667	0,01
4,6	0,2	40	1	0,6	0,0100	-0,51083	0,02
5,8	0,2	50	1	0,5	0,0100	-0,69315	0,02
7,2	0,2	60	1	0,4	0,0100	-0,91629	0,03
9,4	0,2	70	1	0,3	0,0100	-1,20397	0,03
12,9	0,2	80	1	0,2	0,0100	-1,60944	0,05

dove

$$m = -1/\tau$$



Grafico dei dati realizzato con un foglio di calcolo (Excel)



$$\tau = -1/m$$



Grafico dei dati realizzato con Gnuplot

Final set of parameters

=====

m = -0.138823

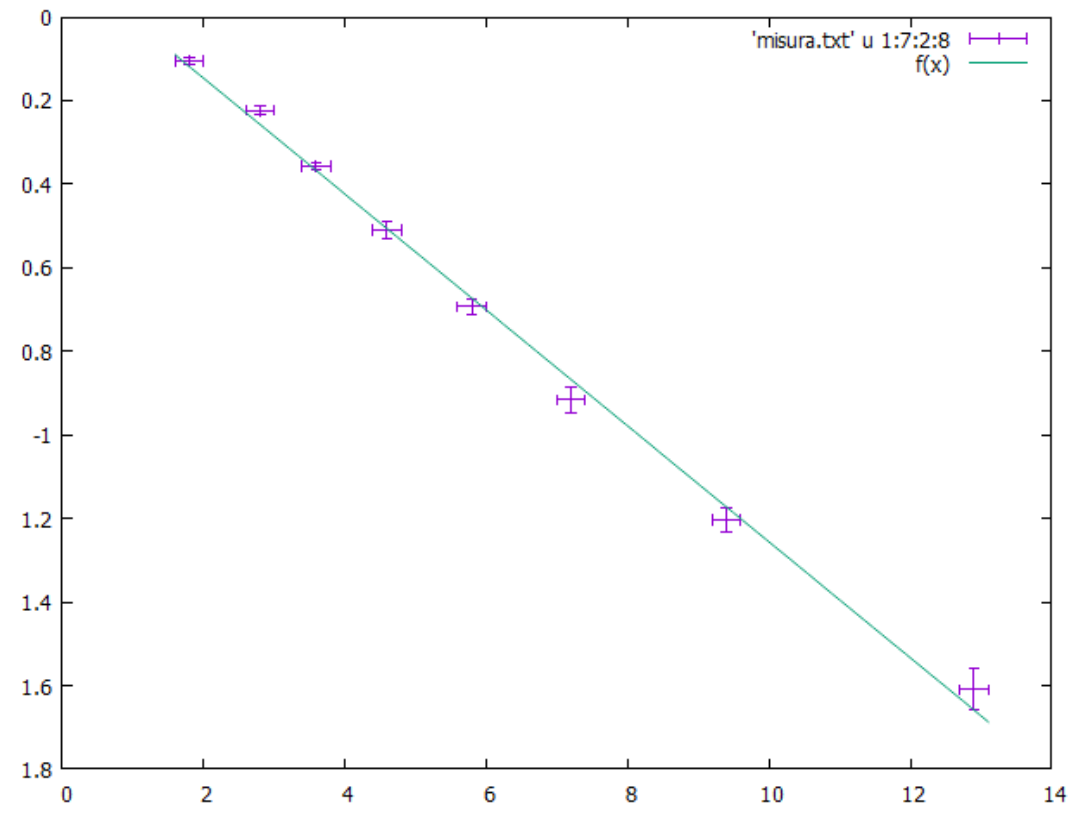
b = 0.132318

Asymptotic Standard Error

=====

+/- 0.003628 (2.613%)

+/- 0.02518 (19.03%)





Il valore atteso per b dovrebbe essere compatibile con lo zero.

Se questo non dovesse accadere, una giustificazione plausibile è che all'istante iniziale $t_0 = 0 \text{ s}$, in cui si fa partire il cronometro, il termometro dovrebbe essere a temperatura di $0.0 \text{ }^\circ\text{C}$ e già a contatto con la massa d'acqua a $100.0 \text{ }^\circ\text{C}$.

Questa condizione, dal punto di vista sperimentale, non è realizzabile perché:

- nel caso in cui si fa partire il cronometro quando il termometro è ancora a contatto con l'acqua e ghiaccio, vi è un certo intervallo di tempo in cui il termometro è in contatto con l'ambiente (a circa $23 \text{ }^\circ\text{C}$) e non con l'acqua a $100.0 \text{ }^\circ\text{C}$;
- nel caso in cui si fa partire il cronometro quando il termometro è già a contatto con l'acqua a $100.0 \text{ }^\circ\text{C}$, a $t = 0 \text{ s}$, il termometro non è a $0.0 \text{ }^\circ\text{C}$ perché certamente esso si scalda nell'intervallo di tempo necessario per spostarlo dal thermos al becker.



Siamo quindi in presenza di errori sistematici. In entrambi i casi si può modellizzare la partenza del cronometro e il transito dal thermos al becker ipotizzando che ci sia un ritardo nel tempo misurato. In tale ipotesi la funzione che meglio approssima i dati è del tipo

$$R(t) = e^{p \cdot (t - t_0)}$$

e dunque

$$\ln R = p \cdot t - p \cdot t_0 = m \cdot t + b$$

$$t_0 = -b/m$$

che, tenendo conto anche dei riflessi dell'operatore nel far partire il cronometro (tra uno e due decimi di secondo) e del ritardo dovuto all'estrazione e immersione del termometro (circa un decimo di secondo), dovrebbe ragionevolmente fornire un valore di tempo dell'ordine di qualche decimo di secondo.



Attenzioni sperimentali

- Più piccola è la costante di tempo τ più rapida è la variazione della misura segnata dal termometro e più difficile è associare alla lettura delle temperature un preciso istante di tempo.
- La non uniformità della temperatura all'interno dell'acqua bollente potrebbe fornire misure di temperatura meno attendibili. Questo è tanto più probabile quanto minore è la costante di tempo del termometro. A tal fine è meglio avere a disposizione un fornello con agitatore termico o comunque attivare procedure che garantiscano una ragionevole uniformità della temperatura all'interno dell'acqua bollente.